

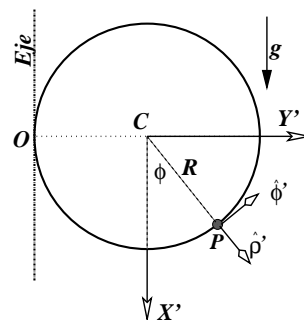
P1 La órbita de un satélite artificial tiene una distancia máxima y mínima al centro de la tierra de $6R_T$ y $2R_T$ respectivamente, donde R_T es el radio de la Tierra. En el momento en que el satélite está en su punto más bajo se activa su sistema de propulsión, en dirección tangencial a la órbita, dejándolo en una órbita circular.

Recordar que $r(\phi) = R/(1 + e \cos(\phi))$

(a) Determine los períodos de rotación de ambas órbitas. (b) Determine las energías totales asociadas a estas órbitas.

P2 Un aro de radio R , gira en torno a un eje vertical—tangente al aro en el punto O (ver figura)—con velocidad angular Ω constante. Una partícula P de masa m puede moverse a lo largo del aro sin roce alguno. Se define un sistema de referencia no inercial S' centrado en el centro C del aro y con ejes X' e Y' en el plano del aro como indica la figura. Como se sabe, la ecuación de movimiento genérica en un sistema no inercial es

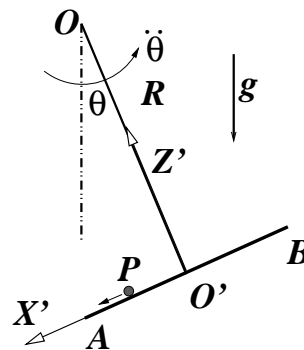
$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \vec{F} - m\ddot{\mathbf{R}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' - m\vec{\Omega} \times \vec{r}' \quad (1)$$



(a) Escriba la ecuación de movimiento de P y su proyección a la dirección $\hat{\phi}'$ en la forma $mR\ddot{\phi} = f$. (b) Obtenga U tal que $f = -\frac{1}{R} \frac{dU}{d\phi}$ dando la expresión para U . (c) Suponiendo que $R\Omega^2 \ll g$ y que el punto de equilibrio es cercano a cero, determine—**en forma aproximada**—este ángulo de equilibrio.

Indicación: Puede resultar conveniente usar en S' tanto los vectores unitarios cartesianos ($\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$) como los vectores polares ($\hat{\rho}', \hat{\phi}'$).

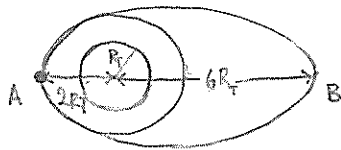
P3 Una plataforma AB es forzada a girar con aceleración angular constante $\ddot{\theta} = \alpha_0$ en torno a un eje horizontal que pasa por el punto O ubicado a una distancia $OO' = R$ de la plataforma. Sobre la plataforma se mueve una partícula P de masa m que cuenta con un pequeño motor que le entrega una fuerza paralela a la plataforma de magnitud $F(t)$, la cual se controla de tal manera que P se desplace con aceleración constante a_0 con respecto a la plataforma. → La condición inicial es $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $x' = 0$ y $\dot{x}' = 0$.



(a) Determine θ , $\dot{\theta}$, x' y \dot{x}' en función del tiempo. (b) Determine las *seudofuerzas* que actúan sobre P en el sistema con origen en O' y ejes X' y Z' (ver figura). (c) Si $a_0 = \frac{2}{3}R\alpha_0$ determine la distancia d entre la partícula y O' en el momento en que la partícula se separa de la plataforma. (d) Si el motor actuase en el sentido opuesto, esto es, $a_0 = -\frac{2}{3}R\alpha_0$ señale si P se separa de la plataforma a una distancia, desde O' , que es mayor, menor o igual a d . Justifique claramente su respuesta.

Suponga que la distancia AB es tan larga como sea necesario, incluso infinita.

(a)



Según la tercera ley de Kepler: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

Órbita original: $a_1 = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = 4R_T \rightarrow T_1 = \frac{16\pi\sqrt{R_T}}{\sqrt{GM}}$

Órbita nueva: $a_2 = 2R_T \rightarrow T_2 = \frac{4\pi\sqrt{2R_T^3}}{\sqrt{GM}}$

(b) Se tiene $\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{1+e}{1-e} \rightarrow e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}$

• Órb. original: $e_1 = \frac{6R_T - 2R_T}{6R_T + 2R_T} = \frac{1}{2}$

• Órb. nueva: $e_2 = 0$

En general, la energía "planetaria" es:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

• Órb. original: Conservación de energía en los dos puntos en que $\dot{r} = 0$ (r_{\max} y r_{\min})

$$E_A = \frac{l^2}{2m \cdot (2R_T)^2} - \frac{GMm}{2R_T} = E_B = \frac{l^2}{2m(6R_T)^2} - \frac{GMm}{6R_T}$$

$$\frac{8l^2}{2m(6R_T)^2} = \frac{GMm}{3R_T} \rightarrow l^2 = 36Mm^2R_T \rightarrow E_1 = E_A = \frac{36Mm}{8R_T} - \frac{GMm}{2R_T} = -\frac{GMm}{8R_T}$$

• Órb. nueva: $E = \frac{l^2}{2m(2R_T)^2} - \frac{GMm}{2R_T}$

pero en el movimiento circular se cumple $r_c = \frac{l^2}{GMm^2}^* = 2R_T \rightarrow l^2 = 26Mm^2R_T$

$$\rightarrow E_2 = \frac{GMm}{4R_T} - \frac{GMm}{2R_T} = -\frac{GMm}{4R_T} //$$

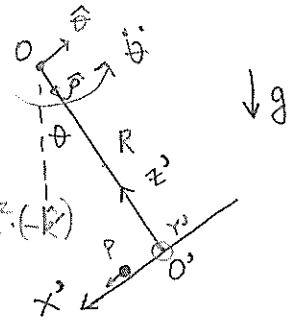
* Se deduce de $\frac{dE}{dt} = 0 \rightarrow m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{GMm}{r^2} = 0$ pero en mov. circular $\ddot{r} = \dot{r} = 0$

$$\rightarrow r_c = \frac{l^2}{GMm^2} //$$

- (a) Según enunciado: $\ddot{\theta} = \alpha_0$, $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$
 $\ddot{x}' = a_0$, $x'(0) = 0$, $\dot{x}'(0) = 0$

Integrando, $\dot{\theta} = \alpha_0 t$; $\theta = \frac{\alpha_0 t^2}{2}$; $\dot{x}' = a_0 t$; $x' = \frac{a_0 t^2}{2}$

- (b) Tenemos: $\vec{R} = R\hat{p}$; $\dot{\vec{R}} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$; $\ddot{\vec{R}} = R\ddot{\theta}\hat{\theta} - R\dot{\theta}^2\hat{p} = R\alpha_0(-\hat{i}') - R\alpha_0^2 t^2(-\hat{k}')$
 $\vec{\Omega} = \alpha_0 t\hat{j}'$; $\dot{\vec{\Omega}} = \alpha_0\hat{j}'$
 $\vec{r}' = \frac{a_0 t^2}{2}\hat{i}'$; $\vec{v}' = a_0 t\hat{i}'$; $\vec{a}' = a_0\hat{i}'$



Señala fuerzas:

$$\begin{aligned} -m\ddot{\vec{R}} &= mR\alpha_0\hat{i}' - mR\alpha_0^2 t^2\hat{k}' \\ -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') &= \frac{m}{2}\alpha_0^2 a_0 t^4\hat{i}' \quad [\text{Centrífuga}] \\ -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' &= 2m\alpha_0 a_0 t^2\hat{k}' \quad [\text{Coriolis}] \\ -m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' &= m\alpha_0 \frac{a_0 t^2}{2}\hat{k}' \quad [\text{Transversal}] \end{aligned}$$

(c) $\vec{F} = mg\sin\theta\hat{i}' - mg\cos\theta\hat{k}' + N\hat{k}' + F(t)\hat{i}'$

Según la ecuación de mov. No inercial para (\hat{k}') :

$$0 = N - mg\cos\theta - mR\alpha_0^2 t^2 + 2m\alpha_0 a_0 t^2 + m\alpha_0 \frac{a_0 t^2}{2}$$

Condición de despegue: $N=0$. Por enunciado: $a_0 = \frac{2}{5}R\alpha_0$.

$$\textcircled{1} g\cos\theta = \left(\frac{5}{2}\alpha_0 a_0 - R\alpha_0^2\right)t^{*2} = (R\alpha_0^2 - R\alpha_0^2)t^{*2} = 0$$

$$\rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \text{ pero } \theta = \frac{\alpha_0 t^{*2}}{2} \rightarrow \alpha_0 t^{*2} = \pi$$

y como $d = x'(t^*) = \frac{a_0 t^{*2}}{2} = \left(\frac{2}{5}R\alpha_0\right) \cdot \frac{t^{*2}}{2} = \frac{R}{5}\alpha_0 t^{*2} = \frac{\pi R}{5}$ //

(d) Ahora $a_0 = -\frac{2}{5}R\alpha_0$, en $\textcircled{1}$ queda: $g\cos\theta = (-2R\alpha_0^2) \cdot t^{*2}$

Entonces $\cos\theta < 0$, lo que implica que el ángulo será necesariamente mayor que $\frac{\pi}{2}$, y a un ángulo mayor corresponderá una distancia d mayor (aunque en sentido opuesto), ya que $x'(t^*) = -\frac{R}{5}\alpha_0 t^{*2}$ es proporcional a $\theta = \frac{\alpha_0 t^{*2}}{2}$